ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS CADRE DE GESTION STATISTIQUE
CONCOURS EXTERNE D'ATTACHÉ DE L'INSEE (M1)

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

PREAMBULE

1°) Dans tout le problème, le corps de base est $\mathbb{R}$.

2°) La partie II peut se traiter indépendamment de la partie I. Il est cependant recommandé de traiter la partie I en premier.

La partie III ne dépend que des résultats de la partie I et la partie IV ne dépend que de la partie II.

3°) Dans tout le problème, l'espace euclidien de dimension 2 (respectivement 3) de la géométrie usuelle est supposé rapporté à un repère orthonormé direct, noté $(O,\vec{i},\vec{j})$ (respectivement $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$).

Les coordonnées d'un point sont notées (x,y) (respectivement (x,y,z), en dimension 3).

Les coordonnées de deux vecteurs $\vec{v}$, $\vec{v}'$ quelconques étant notées $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$ en dimension 2 (respectivement $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}X'\\Y'\\Z'\end{pmatrix}$ en dimension 3), le produit scalaire usuel de ces deux vecteurs, noté $\vec{v} \cdot \vec{v'}$, est égal à (XX' + YY') en dimension 2 (respectivement (XX' + YY' + ZZ') en dimension 3). Le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{v}$ du vecteur $\vec{v}$ par lui-même est noté par abréviation $\vec{v}^2$.

4°) Si f est une application d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{R}^3$) dans $\mathbb{R}$, admettant des dérivées partielles secondes continues, le gradient de f, c'est-à-dire l'application à valeurs vectorielles de composantes $\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}$

(respectivement $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$ en dimension 3) est noté $\overrightarrow{\text{grad } f}$.

Le laplacien de f, c'est-à-dire l'application à valeurs réelles $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$ (respectivement $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$), est noté Δf .

5°) Si $r > 0$, $\ell n\ r$ désigne le logarithme népérien de r.

*
* *

PARTIE I

Le plan euclidien est rapporté au repère orthonormé direct $(0,\vec{i},\vec{j})$, où les coordonnées cartésiennes d'un point M sont notées (x,y), comme indiqué plus haut.

A tout point M du plan distinct de O, on associe un unique système de coordonnées polaires (r,θ) défini par :

- $OM = r$,
- $(\vec{i},\overrightarrow{OM}) = \theta$ et $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

On a donc :

$$x = r \cos \theta ,$$
$$y = r \sin \theta ,$$

ce qui définit x et y comme fonctions de r et θ. Inversement, r et θ peuvent être considérés comme fonctions de x et y.

1°) Ecrire la matrice jacobienne :

$$J(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

en fonction de r et θ seuls.

Vérifier que, sous la seule réserve $r > 0$, cette matrice admet une inverse, et calculer $J^{-1}(r,\theta)$, en fonction de r et θ également.

2°) Les calculs suivants n'utiliseront que r et θ, et s'effectueront à partir de l'expression de $J^{-1}(r,\theta)$.

a) Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{\text{grad } r}$ et $\overrightarrow{\text{grad } \theta}$.

b) Calculer $\overrightarrow{\text{grad } r}^2$, $\overrightarrow{\text{grad } \theta}^2$ et $\overrightarrow{\text{grad } r} \cdot \overrightarrow{\text{grad } \theta}$. Le résultat relatif au produit scalaire pouvait-il être prévu géométriquement ?

c) Calculer Δr et $\Delta\theta$.

3°) A partir de l'égalité $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, retrouver, à titre de vérification, $\overrightarrow{\text{grad } r}^2$ et Δr par dérivation par rapport à x et y.

4°) $(x,y) \longrightarrow f(x,y)$ désigne une application de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$, admettant des dérivées partielles secondes continues, dont le laplacien est noté Δf. A f, on associe g, fonction de r et θ, définie, lorsque $r > 0$ et $0 \leqslant \theta < 2\pi$, par l'égalité :

$$g(r,\theta) = f(r \cos\theta, r \sin\theta) \quad .$$

On se propose d'exprimer Δf à l'aide des dérivées partielles de g.

a) Démontrer l'égalité :

$$\Delta f = \overrightarrow{\text{grad } r}^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \overrightarrow{\text{grad } \theta}^2 \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + 2 \overrightarrow{\text{grad } r} \cdot \overrightarrow{\text{grad } \theta} \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} + \Delta r \frac{\partial g}{\partial r} + \Delta\theta \frac{\partial g}{\partial \theta} ,$$

où il est entendu que Δf est évalué au point (x,y) tel que $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$, tous les termes du second membre étant évalués pour les mêmes valeurs de r et θ.

b) En déduire l'expression de Δf cherchée en employant les résultats de I-2°).

*

* *

PARTIE II

L'espace euclidien de la géométrie usuelle de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, où les coordonnées cartésiennes d'un point M sont notées (x,y,z).

A tout point M de l'espace, n'appartenant pas à l'axe $(O,\vec{k})$, on associe un unique système de coordonnées sphériques défini comme suit :

- $OM = r$,

- en désignant par m la projection orthogonale de M sur le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$, on pose $(\vec{i},\overrightarrow{Om}) = \varphi$ et $0 \leqslant \varphi < 2\pi$,

- $(\vec{k},\overrightarrow{OM}) = \theta$ et $0 < \theta < \pi$.

On a donc :

$$x = r \sin\theta \cos\varphi ,$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi ,$$
$$z = r \cos\theta ,$$

ce qui définit x,y,z comme fonctions de r,θ,φ . Inversement, r,θ,φ peuvent être considérés comme fonctions de x,y,z.

Préliminaire :

Sur des figures, tracer les trois surfaces d'équations suivantes :

$$* \quad r = r_o$$
$$* \quad \theta = \theta_o$$
$$* \quad \varphi = \varphi_o$$

En géométrie, comment appelle-t-on ces surfaces ?

1°) Ecrire la matrice jacobienne :

$$J(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$ en fonction de r,θ,φ seuls.

Vérifier que, sous la seule réserve $r > 0$ et $\sin\theta > 0$, cette matrice admet une inverse, et calculer $J^{-1}(r,\theta,\varphi)$ en fonction de r,θ,φ également.

2°) Les calculs suivants n'utiliseront que r,θ et φ et s'effectueront à partir de l'expression de $J^{-1}(r,\theta,\varphi)$.

a) Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{\text{grad } r}$, $\overrightarrow{\text{grad } \theta}$, $\overrightarrow{\text{grad } \varphi}$.

b) Calculer $\overrightarrow{\text{grad } r}^2$, $\overrightarrow{\text{grad } \theta}^2$, $\overrightarrow{\text{grad } \varphi}^2$, ainsi que les trois produits scalaires $\overrightarrow{\text{grad } r} \cdot \overrightarrow{\text{grad } \theta}$, $\overrightarrow{\text{grad } \theta} \cdot \overrightarrow{\text{grad } \varphi}$ et $\overrightarrow{\text{grad } \varphi} \cdot \overrightarrow{\text{grad } r}$ .Les derniers résultats pouvaient-ils être prévus géométriquement ?

c) Calculer Δr, $\Delta\theta$, $\Delta\varphi$.

3°) A partir de l'égalité $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, retrouver, à titre de vérification, $\overrightarrow{\text{grad } r}^2$ et Δr par dérivation par rapport à x,y,z.

4°) Dans cette question, $(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z)$ désigne une application de $\mathbb{R}^3$ privé de l'axe $(O,\vec{k})$ dans $\mathbb{R}$, admettant des dérivées partielles secondes continues. Δf désigne le laplacien de f.

A f on associe g, fonction de r,θ,φ, définie lorsque $r > 0$, $0 < \theta < \pi$ et $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, par l'égalité :

$$g(r,\theta,\varphi) = f(r \sin\theta \cos\varphi \ , \ r \sin\theta \sin\varphi \ , \ r \cos\theta) \ .$$

On se propose d'exprimer Δf à l'aide des dérivées partielles de g.

a) En s'inspirant de I-4-a), démontrer une formule exprimant Δf à l'aide des dérivées partielles de g ainsi que des gradients et des laplaciens de r,θ,φ .

b) En déduire l'expression de Δf cherchée en employant les résultats de II-2°) .

PARTIE III

On reprend ici le problème plan considéré à la partie I, dont on conserve les notations. A toute fonction $f : (x,y) \longrightarrow f(x,y)$ de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles secondes continues, on associe g telle que $f(x,y) = g(r,\theta)$ par le procédé décrit en I.

On se propose d'étudier les fonctions f telles que :

i) $\Delta f = 0$;

ii) la fonction g associée soit de la forme :

$$g(r,\theta) = u(r) \times v(\theta) \quad ,$$

où u et v sont deux fonctions à valeurs réelles, de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et $[0,2\pi[$ respectivement ;

iii) g ne soit pas la fonction identiquement nulle, c'est-à-dire telle qu'il existe $r_0 \in]0,+\infty[$ et $\theta_0 \in [0,2\pi[$ vérifiant $u(r_0) \neq 0$ et $v(\theta_0) \neq 0$.

1°) Montrer, en utilisant la continuité de f et de ses dérivées partielles premières, qu'on a nécessairement :

$$\lim_{\substack{\theta \longrightarrow 2\pi \\ \theta < 2\pi}} v(\theta) = v(0) \quad ,$$

et :

$$\lim_{\substack{\theta \longrightarrow 2\pi \\ \theta < 2\pi}} v'(\theta) = v'(0) \quad .$$

2°) Démontrer l'existence d'une constante réelle k (indépendante de r et de θ) telle que u et v soient respectivement solutions des équations différentielles :

$$(E_r) \quad r^2 u''(r) + r\, u'(r) + k\, u(r) = 0 \quad ,$$

$$(E_\theta) \quad v''(\theta) - k\, v(\theta) = 0 \quad .$$

3°) On suppose ici $k = 0$.

Quelles sont les fonctions solutions respectivement de (E_r) et (E_θ) ?

Quelles sont celles des solutions de (E_θ) qui vérifient de plus les conditions démontrées en III-1°) ?

4°) On suppose ici $k = \omega^2$, où $\omega > 0$.

Quelles sont les fonctions solutions de (E_r) et de (E_θ) ?

On pourra, par exemple, pour intégrer (E_r), effectuer le changement de variable défini par $t = \ell n\ r$. On devra écrire l'expression générale des solutions de (E_r) sous forme réelle, c'est-à-dire sans employer le symbole i des nombres complexes.

Existe-t-il, toujours sous l'hypothèse $k = \omega^2$ et $\omega > 0$, des fonctions v non nulles solutions du problème posé ?

5°) On suppose cette fois $k = -\omega^2$, avec $\omega > 0$.

Quelles sont les fonctions solutions de (E_r) et de (E_θ) ?

Toujours en supposant que v n'est pas la fonction identiquement nulle, montrer que ω est nécessairement élément de $\mathbb{N}^*$.

Ecrire l'expression des fonctions u et v correspondantes.

PARTIE IV

On reprend ici le problème tridimensionnel considéré à la partie II. A toute fonction f deux fois différentiable $(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ privé de l'axe $(0,\vec{k})$ dans $\mathbb{R}$, on associe g telle que $f(x,y,z) = g(r,\theta,\varphi)$ par le procédé décrit en II.

On se propose d'étudier les fonctions f telles que :

i) $\Delta f = 0$;

ii) la fonction g associée soit de la forme :

$$g(r,\theta,\varphi) = u(r) \times v(\theta) \quad ,$$

où u et v sont deux fonctions à valeurs réelles, de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et $]0,\pi[$ respectivement.

iii) g ne soit pas la fonction identiquement nulle, c'est-à-dire qu'il existe $r_0 \in]0,+\infty[$ et $\theta_0 \in]0,\pi[$ vérifiant $u(r_0) \neq 0$ et $v(\theta_0) \neq 0$.

1°) Démontrer l'existence d'une constante réelle k (indépendante de r et de θ) telle que u et v soient respectivement solutions des équations différentielles :

$$(E_r) \quad r^2 u''(r) + 2r u'(r) + k u(r) = 0 ,$$

$$(E_\theta) \quad v''(\theta) + \text{cotan } \theta \, v'(\theta) - k \, v(\theta) = 0 \quad .$$

où cotan θ désigne la fonction cotangente de l'angle θ.

2°) On suppose ici $k = 0$.

Quelles sont les fonctions solutions respectivement de (E_r) et de (E_θ) ?

3°) On suppose ici $k \neq 0$.

Ecrire l'expression des fonctions solutions de (E_r) (sous forme réelle, c'est-à-dire sans emploi du symbole i), en distinguant trois cas selon la valeur de k.

On n'entreprendra pas l'étude de l'équation différentielle (E_θ).